VARIA

Gaál Botond*
Debrecen

„A semmiből egy új, más világot teremtettem”

Hogyan értette ezt Bolyai János 200 évvel ezelőtt?**

Bevezető gondolatok

A 2023. esztendőben kivételesen sok jubileumunk volt. Elég Csokonaira, Petőfire, Madáchra gondolni, vagy gróf Andrássy Gyulára, és kiemelten a nemzeti imádságunk, a *Himnusz* megszületésére. Kölcsey Ferenc, a Debreceni Református Kollégium neveltje 1823. január 22-én tett pontot *A magyar nép zivataros századaiból* alcímmel írt költeménye végére Szatmárcsekén. Nincs még egy olyan vers, amely az elmúlt 200 év alatt a magyarságot ilyen mélyen megszólító lélekverssé vált volna. Van azonban ebben az évben még egy rendkívüli, sőt világraszóló matematikai évfordulós esemény is, amely szerényen húzódik meg az ünneplések sorában. Bolyai János, a Marosvásárhelyi Református Kollégium egyik kitűnő diákja is éppen 200 éve rengette meg a matematika alapjait, és ezzel új fejlődési pályára állította e diszciplínát. Őt a világon valaha élt jelentős matematikusok között a tíz legnagyobb lángelme közé sorolják.

---

* DSc dr. Gaál Botond (Vámosatya, 1946) diákévei a Debreceni Református Kollégiumhoz és a Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetemhez kötődnek. Előbb matematika–fizika szakos középiskolai tanári (1970), majd lelkészi oklevelet szerzett a Református Teológiai Akadémián (1976). Thomas F. Torrance tanítványaként az Edinburghi Egyetemen egy évig képezte tovább magát a teológiában (1976–1977). Teológiai doktori fokozatot a Debreceni Református Teológiai Akadémián szerzett a természettudományok és a teológia kapcsolata témájú disszertációjával (1985), és 1987-től a Debreceni Református Hittudományi Egyetem (DRHE) dogmatika tanszékének professzorává választották. 1993-ban megalapította a Hatvani István Teológiai Kutatóintézetet, 2008-ban pedig megszerezte a Magyar Tudományos Akadémia doktora címet. 2001-től 2014-ig volt a DRHE Doktori Iskolájának vezetője, valamint a Doktori és Habilitációs Tanácsának elnöke, 2008 és 2010 között az Országos Doktori Tanács alelnöki tisztségét töltötte be. 2015-ben a Kolozsvári Protestáns Teológiai Intézet tiszteletbeli professzorává válaszották, 2023. március 15-én pedig Széchenyi-díjat vehetett át a Magyar Köztársaság elnökétől. Számos egyéb tudományos egyesületi tagsága mellett 16 könyv és több mint 300 tanulmány szerzője.

** A tanulmány törzsrésze a következő kötetben jelent meg: Gaál Botond: *A zárt világ felnyitása*. Függelék: Kérdő Kálmán: Természet, természetleírás és matematika. Debreceni Református Hittudományi Egyetem, Hatvani István Teológiai Kutatóközpont, Debrecen 2007, 69–78.

A tanulmányt a *Debreceni Szemle* 31. 2023/4-es száma közölte; az itt olvasható szöveg ennek a tanulmánynak szerkesztett változata.

Bolyai János matematikai modellváltására emlékezve mi is csatlakozni kívánunk a hazai neves jubileumokhoz. A Magyar Tudomány Ünnepe kapcsán szeretnénk ezt az új szemléletű eredményt méltatni. Pontosan 20 évvel ezelőtt vált hivatalossá a Széchenyihez köthető november 3-i dátum, a Magyar Tudományos Akadémia alapítása 1825-ben. Két évvel korábban, de pontosan ehhez az időponthoz kötődik a mi megemlékezésünk is. Összefoglaljuk, milyen különös és jelentős tudományelméleti esemény történt akkor.

A modellváltást előkészítő események

Egy 2100 éves időszaknak a lezárását a címnek választott mondat jelzi, amelyet Bolyai János az édesapjához írt levelében fogalmazott meg 1823. november 3-án. Hosszú tehát a történet. Előbb vissza kell mennünk Eukleidész[1] *Elemek* című művéhez, amelyben Kr. e. 300 körül foglalta össze az addigi matematikát és lefektette annak axiomatikus alapjait. A geometria axiómarendszerében leginkább a 11. axióma volt szembetűnő.[2] Ez a 11. axióma meglehetősen makacs problémának bizonyult.[3] Hovatartozása már a 4. és 5. században is komoly fejtörést okozott

---

[1] A neves ókori matematikus neve görögül valóban Eukleidész. Általában a nemzeti fordítások, így a magyar is a latin fordítások révén az Euklidész nevet választották. Manapság sokan választják a hivatalosan is elfogadott Eukleidész formát, mások viszont megmaradtak az Euklidész alaknál, mert a magyar szószármazékok is erre vezethetők vissza, pléldául euklideszi geometria stb. Mi is inkább ezt a formát fogjuk használni.

[2] Itt nem részletezzük ezt az axiómarendszert. A történeti és elvi részletek megtalálhatók *A zárt világ felnyitása* című könyvem 35–49. oldalain. Annyit azonban el kell mondanunk, hogy az Alexandriában dolgozó Euklidész *Elemek* című eredeti műve elveszett, de a gondos és éles elmék a fejükben őrizték meg tartalmát nemzedékeken át. Időszámításunk után a 4. században egy Theon nevű matematikus jegyezte le, s mivel ez is elveszett, egy másik matematikus, Proklosz írta le újból emlékezetből az 5. században. Ezt a szöveget őrizték aztán meg az arab tudósok, és majdnem ezer év után az arab és latin fordítások alapján, majd pedig az újból előkerült Theon és Proklosz által készített görög szöveg alapján készítettek egy immár jó latinsággal megírt változatot. Ezt 1482-ben adták ki Velencében, s ez szolgált az egész európai tudományos gondolkodás alapjául. Valószínűleg e könyv ismerete alapján vált általánossá a *more geometrico* kifejezés, amelyet attól kezdve a tudományművelés alapjának tekintettek, tehát a „geometria módján" elvet minden tudományban érvényesíteni kellett. Ekkor vette kezdetét Európában is az axiomatikus gondolkodás minden területen. A geometria volt a minta.

[3] Csupán arra hívjuk fel a figyelmet, hogy az elhíresült 11. axióma Euklidész művében még 5. posztulátumként szerepelt. Posztulátumnak a görögök azt tartották, amit eleve megkövetelünk általános elvként a vitában. Az axióma pedig olyan alaptételt jelent, amelyet a szemlélet alapján elfogadunk, és annak igaz voltát nem vitatva minden további állításunk bizonyításánál arra támaszkodunk. Mivel Euklidész eredeti 5. posztulátuma alaptételnek is tekinthető, sőt a 4. posztulátum is, a későbbi korokban ezt a kettőt átsorolták a már meglévő 9 axióma utáni helyre. Így lett az úgynevezett euklideszi axiómarendszer 11 tagú. Ezért szoktak olykor hivatkozni az 5. posz-

Theonnak és Proklosznak. Ők voltak annak a két évszázadnak a legjobb matematikusai. A gond az volt, hogy valójában tételjellege van, amelyet be kellene, be lehetne bizonyítani, s ez sokakban keltette azt a gyanút, hogy hátha nem is axióma. Prékopa András matematikus megemlíti, hogy Proklosz szerint már Ptolemaioszt is foglalkoztatta ez a kérdés a 2. században, aztán a 9. századi arab tudós, Al-Nirizi kommentárokat írt Euklidész egész első könyvéhez, Naszir Eddin (1201–1279) pedig a következő szellemes átfogalmazását adta a 11. axiómának: „Ha egy görbe minden pontja egyenlő távolságra van egy adott egyenestől, akkor ez a görbe maga is egyenes".[4] Végül Bolyai Jánosnak és Nyikoláj Lobacsevszkijnek sikerült megoldania a nagy kérdést. Az eseményt többen a matematika kopernikuszi fordulatának nevezik.[5] De mi történt Bolyai előtt?

A 11. axióma így szól:

> „Követeltessék meg, [...] hogy ha két egyenest úgy metsz egy egyenes, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek (összegben) két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabbítva találkozzék azon az oldalon, amerre az (összegben) két derékszögnél kisebb szögek vannak."

Ez tényleg egyszerű állítás, de a megfogalmazása kissé bonyolult. Az az érzésünk támad, hogy ez valami bizonyítandó tétel, s ezért foglalkoztatta oly sokáig, talán másfél ezer évig a matematikusokat.

Összefoglalóan azt mondhatjuk, hogy ennek az axiómának a vizsgálata két úton-módon történt. A matematikusok egyik része azt akarta igazolni, hogy ez az axióma – már talán Theon és Proklosz óta – a többi axióma és a posztulátumok logikai következménye. Más gondolkodók pedig úgy ragadták meg a kérdést, hogy éppen a szükségességét próbálták bizonyítani, vagyis azt, hogy elhagyása logikai ellentmondásokhoz vezet. Makacs feladatnak bizonyult. A 11. axióma „nem engedte", hogy kibillentsék az axiómák közül, és a mi Bolyaink erre figyelt fel. A görögök szellemi nagyságát dicséri, hogy a késői utókor egyik tábora sem érte el célját.

Közben viszont az történt, hogy a bizonyítási próbálkozások alatt ezt a nehézkes állítást nemcsak a 13. századi arab tudósok, hanem később mások is sokszor átfogalmazták, és az azzal egyenértékű állítást vizsgálták az eredeti helyett. A több

---

tulátumra, amely igaz is, de valójában a 11. axiómáról van szó. Mi is 11. axiómaként említjük azt az elvi problémakört, amely Bolyai matematikai munkásságának fémjelzője. Magyar iskolákban párhuzamossági axiómának is nevezik. Bolyai Farkas ezekől a „paralelláktól" óvta a fiát, nehogy sok időt „pazaroljon" rájuk.

[4] Prékopa András: Bolyai János forradalma. In: *Természet Világa* 133. (2003), I. különszám, Bolyai-emlékszám, (3–21), 10.

[5] Vö. uo. 3.

mint egy tucat átfogalmazásból példaként a három legismertebb változatot említjük meg:

a) egy egyeneshez a rajta kívül fekvő ponton át (az egyenest és pontot tartalmazó síkban) csak egy párhuzamos húzható;
b) a háromszög szögeinek összege két derékszög;
c) vannak hasonló háromszögek: ha egy háromszög minden oldalát azonos arányban változtatjuk, a háromszög szögei nem változnak.[6]

Az első megfogalmazás lett a 11. axióma leginkább közkedvelt változata, ezért kaphatta a párhuzamossági axióma elnevezést. De még ilyen formájában sem látszott igazi axiómának, mert végül is nem ellenőrizhető a gyakorlatban. A 18. században a matematikusok újfent nekilendültek, és elkezdtek foglalkozni a párhuzamossági axióma kérdésével. Giovanni G. Saccheri (1667–1733) 1733-ban, Johann H. Lambert (1728–1777) 1766-ban, majd Adrien M. Legendre (1752–1833) 1800-ban készített értékes hozzájárulást ehhez a gondolathoz. Hozzájuk hasonló előfutárnak tekintendő Bolyai Farkas (1775–1856) is.[7] Ez a csoport inkább a 11. axiómának a többiből való levezethetőségével foglalkozott.

A 19. századi tudósok már megsejtették, hogy másfajta geometria is van az euklideszi geometria mellett. Ferdinand K. Schweikart (1780–1859) 1818-ban, Franz A. Taurinus (1794–1874) pedig 1826-ban jutottak erre a gondolatra.[8] Carl F. Gauss (1777–1855) is csak a sejtés szintjén vélekedett e dologban, de nem tekinthető a hiperbolikus geometria felfedezőjének.[9] A felfedezés érdeme egyértelműen Bolyai Jánosé (1802–1860) és Nyikoláj Lobacsevszkijé (1792–1856), akik egymástól függetlenül jutottak ugyanarra a következtetésre. Bolyai hamarabb felfedezte, Lobacsevszkij pedig hamarabb publikálta.

Szeretnénk végre tudni, mi ennek a felfedezésnek a lényege? Mi itt főként Bolyai János gondolkodását fogjuk követni. Előbb azonban ismerjük meg életét és sorsát.

---

[6] A három példa forrása: Gábos Zoltán: Mit adott a fizikának Bolyai János? In*:* Kapitány Katalin – Németh Géza – Silberer Vera (szerk.): *Bolyai emlékkönyv Bolyai János 200. szüetésnapjára*. Vincze Kiadó, Budapest 2004, (267–281) 268.

[7] Bolyai Farkas a *Tentamen* című fő művében számol be mindazokról a kísérleteiről, amelyeket az 5. posztulátum bizonyítása érdekében tett, és felsorolja az azt helyettesítő átfogalmazásokat.

[8] A történeti adatokat jobbára Gábos Zoltán összefoglalásából vettük. Vö. Gábos Zoltán: *Mit adott a fizikának Bolyai János?* 268–269.

[9] Szénássy Barna megvizsgálta Carl F. Gauss azon „munkásságát”, amely a nem euklideszi geometriára vonatkozik, de nem talált arra utaló jeleket, hogy ezen a téren valamit is tett volna. Vö. Szénássy Barna: Megjegyzések Gauss nem euklideszi geometriai eredményeihez. In: Kapitány Katalin – Németh Géza – Silberer Vera (szerk.): *i. m.* 111–120. Prékopa András is ebbe a csoportba sorolja Gausst. Vö. Prékopa András: Bolyai János felfedezésének előzményei és utóhatása. In: Kapitány Katalin – Németh Géza – Silberer Vera (szerk.): *i. m.* (93–110), 98.

Bolyai János életútja röviden

1802. december 15-én született Kolozsvárott kisnemesi székely családban. Édesanyja Árkosi Benkő Zsuzsanna, édesapja pedig Bolyai Farkas volt, akit 1804-ben megválasztottak a Marosvásárhelyi Református Kollégium matematika–fizika–kémia professzorává. János fiuk zenei és matematikai tehetsége már korán megmutatkozott. A Marosvásárhelyi Református Kollégiumban gyorsan haladt a tanulmányaival, és 16 évesen beiratkozhatott a bécsi Császári és Királyi Hadmérnöki Akadémiára. Húszéves volt, amikor elvégezte itteni tanulmányait. A temesvári erődítményhez osztották be. Magas szinten hegedült és jól vívott. Már az akadémiai évei alatt is foglalkozott a 11. axióma kérdésével. A paralellák iránti érdeklődése édesapjától származik, s bár ő óvta a fiát attól, hogy ezzel a témával foglalkozzék, temesvári katonatiszti szolgálata alatt megoldotta a párhuzamossági axióma kérdését, és 1823. november 3-án keltezett levelében ezt ekképpen írta meg édesapjának: „a semmiből egy ujj más világot teremtettem”. Idekívánkozik, hogy mivel széles körű tájékozottsága révén a keresztyénség azon alapvető tanítását is ismerte, amelyet a „creatio ex nihilo”, tehát a „semmiből való teremtés” foglal össze, nyilvánvaló, hogy ennek mintájára fogalmazhatta meg az imént idézett híres mondatát.[10] Mármost a fölfedezését ő le is írta latinul 1825-ben. Édesapja is írt egy kétkötetes matematikai művet *Tentamen* címmel, amely tankönyvül szolgált Marosvásárhelyen. Ennek első kötetéhez csatolva jelentették meg *Appendix*-ként Bolyai János nemeuklideszi geometriájára vonatkozó művét 1832-ben. Előtte különlenyomatban is megjelent, és ezt 1831-ben Gaussnak is elküldték. Eredetileg ezt a címet viselte: *Scientia Spatii*, azaz: *A tér tudománya*.[11]

Bolyai János élete tele volt zökkenőkkel. Egyébként csöndes, jámbor ember volt. Már 30 éves korától betegség gyötörte, s alig volt nyugalmas ideje az alkotásra. A magyarországi matematikusok között nem akadt méltó szellemi partnere, aki

---

[10] A „semmiből egy ujj más világot teremtettem” megállapítás, amelyet az édesapjához írt levelében olvashatunk, csupán egyfajta hangsúlyozása lehet a felfedezése horderejének. A kifejezést ő nem vehette máshonnan, mint a *creatio ex nihilo* keresztyén tanítás köréből. Ez tudományos értelemben nem állja meg a helyét, mert a Bolyai-féle felfedezésnek éppen az a lényege, hogy ő nem a „semmiből”, hanem a már meglévő euklideszi axiómarendszerből hozott elő újat. Amikor ugyanis a hiperbolikus geometriában a párhuzamossági szög eléri a derékszöget, az egész rendszer átmegy az euklideszi geometriába és annak speciális esetévé válik.

[11] Az *Appendix* fedelén már a hosszabb cím jelent meg latinul: *Appendix, Scientiam Spatii absolute veram exhibens; a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica.* Magyarul: *Appendix, a tér abszolút igaz tudománya; a XI. Euklidész-féle axióma (a priori soha el nem dönthető) helyes, vagy téves voltától független tárgyalásban; annak téves volta esetére a kör geometriai négyszögesítésével.* Vö. Prékopa András: *Bolyai János forradalma,* 13.

művének jelentőségét idejében felismerte volna. Amíg élt, Európában sem érett meg az idő erre. Csak jóval halála után kezdték fölfedezni gondolatainak értékét, amint ez Riemann esetében is így volt.

Bolyai János Orbán Rozáliával kötött házasságából két gyermek született, Dénes és Amália. Egyenetlen házasságuk később fel is bomlott. Elhagyatottságban halt meg 1860-ban, Marosvásárhelyen. Temetésén három ember vett részt, és egy katonai díszkíséret. A református egyház halotti anyakönyvébe a lelkész ezt a bejegyzést tette: „Híres nagyelméjű mathematicus volt, az elsők között is első. Kár, hogy talentuma használatlanul ásatott el."[12] Ennél a két mondatnál ma sem tudnánk jobban összefoglalni életének tanulságait és magyar nemzetünknek szóló üzenetét.

A modellváltás lényege

A 11. axióma lényegében azt állítja, hogy egy egyenesen kívül fekvő ponton keresztül, az általuk meghatározott síkban egy párhuzamos egyenes húzható. Bolyai János meglátott egy sarkalatos tényt: ez az axióma olyan szerepet játszik az euklideszi geometriában, hogy nem enged kilépni belőle. Itt Gábos Zoltán nagyon lényeges megállapítást tesz:

> „Az axiómának sajátos, elkülönített szerepe van az euklideszi keretben, mivel a benne foglalt állítás hangsúlyozza, rögzíti az euklideszi jelleget. Egyben egy olyan merevítőelemet képviselt, amelyik akadályozza az euklideszi rendszerből való kilépést. Az akadály eltávolítása nyitott utat egy új, logikailag lehetséges geometria és egyben egy új térmodell felé."[13]

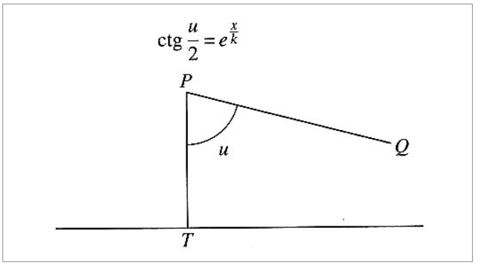
Ez az axióma szinte bezárja, lezárja azt a rendszert. Úgy is fogalmazhatnánk: *nem lehet bebizonyítani, hogy a 11. axióma az előző tíz axiómának következménye.* Ha pedig ez így van, akkor bátran el lehet hagyni és egy másik állítással helyettesíteni. Ezt Bolyai meg is tette, és az új axióma révén nem kevesebbet állított, mint azt, hogy az egyenesen kívül lévő ponton keresztül a síkjukban végtelen sok párhuzamos húzható. Ez éppen annyira elképesztő állítás, mint amikor Einstein tekintet nélkül mindenre állandónak mondta ki a fénysebességet. Bolyai János megdöbbentő állítása azt eredményezte, hogy végre kiléphetett az euklideszi rendszerből, s ez egy olyan folyamatot indított el a matematika fejlődésében, amely lényegében mindmáig tart. Felnyitotta a zárt világot.

---

[12] Puskás Ferenc: Előhang a Bolyai-emlékkönyvhöz. In: Puskás Ferenc – Tibád Zoltán (szerk.): *Bolyai emlékkönyv. Bolyai János születésének 200 éves évfordulójára.* Erdélyi Magyar Műszaki Tudományos Társaság, Kolozsvár 2003, (7–13) 11–12.

[13] Vö. Gábos Zoltán: *Mit adott a fizikának Bolyai János?* 269.

Itt nem foglalkozhatunk a dolog konkrét matematikai részleteivel, csak azt említjük meg, hogy végül is az új geometriában egy hiperbolikus algebrai kifejezés szerepel, s ezért kapta a hiperbolikus geometria nevet. Ennek matematikai szempontú leírását Kiss Elemér alapján foglaljuk össze, aki az *Appendix* 29. paragrafusára hivatkozva az alábbi ábrát, illetve magyarázatot közli:



„Ahol PT=x, m(TPQ szög)=u az x távolsághoz tartozó párhuzamossági szög, e az Euler-féle szám (e=2,718…), k pedig egy, a teret jellemző pozitív valós szám."[14]

Határesetben ez a geometria átmegy az euklideszi geometriába.

A Bolyai-geometria jövőbe mutató jelentősége

Jelentőségét tekintve a Bolyai és Lobacsevszkij által létrehozott új geometriai szemlélet, illetve tudományos bátorság további eredményekhez vezetett. Az út kétfelé ágazott.

Az egyik nagy jelentőségű mozgás a matematika több területén az axiomatizálás bevezetését vetette föl. Ebben éppen az az érdekes, hogy a Bolyai-féle gondolkodás alapjában véve megszüntette a *more geometrico* mindenre kiterjedő, örök érvényét, de egyúttal fölhívta a figyelmet az axiomatizálás helyes használatára is. Tovább már nem kellett tartani attól a következménytől, hogy az axiómák csupán egy merev keretet biztosítanak a tudományos gondolkodás számára, hanem inkább olyan szerepet töltenek be, amely által rendet teremtenek az egyes területeken. Ha pedig tovább szeretnénk lépni egy axiomatikusan rendezett területről, mert a rendszerünk zártnak mutatkozik, meg kell találni azt a „merevítő" elemet, amely nem enged kilépni a rendszerből, és azt oly módon kell helyettesíteni egy másikkal, hogy a korábbi igazságok ne sérüljenek, ugyanakkor tovább lehessen lépni egy nyitottabb világba. Ez történt a matematika jó néhány területén, mint például az algebrában és a számelméletben, de további lépések történtek a geometria terén is.[15] Ezt David Hilbert (1862–1943) oldotta meg 1899-ben.

Az elindított folyamat másik nagy ága megmaradt a geometria berkeiben, és Bernhard Riemann (1826–1866) nevéhez kötődik. Ő még megérte azt, hogy Gauss halála előtt két évvel benyújtotta a habilitációs téziseit, amelyek közül kettőt már

---

[14] A részletesebb magyarázatot ld. Kiss Elemér: *Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából.* Akadémiai Kiadó – Typotex Kiadó, Budapest 2005, 21.

[15] Vö. Prékopa András: *Bolyai János felfedezésének előzményei és utóhatása,* 106.

kidolgozott, de Gauss éppen a harmadikra mutatott rá, amellyel még nem volt készen.[16] Ezt is kidolgozta, és ezáltal egy olyan nagy hatású művel ajándékozta meg a matematikát, amely később az Einstein-féle relativitáselmélet alapjául szolgált. A mű a geometria alapjaival foglalkozott.[17] 1854-ben Riemann sikerrel tette le a vizsgáját, Gauss pedig a következő évben halt meg. A tudományos világ valószínűleg ennek a műnek a jelentőségét sem igen fogta föl, mert csak Riemann 1866-ban bekövetkezett korai halála után két évvel adták ki.[18] Riemann igazából Gauss felületekkel foglalkozó geometriai elképzelését általánosította. Még ő maga sem igen ismerte a Bolyai és Lobacsevszkij által már kidolgozott hiperbolikus geometriát, de ekkor még a tudományos közvélemény előtt sem volt eléggé ismert, illetve elismert. A dolog lényege az, hogy Riemann a pozitív görbületű felületekkel foglalkozott, a hiperbolikus geometria pedig a negatív görbületű felületnek felel meg. Számunkra úgy tűnik, hogy Gauss mindkét esetben politikusan járt el, nem állt ki határozottan sem a Bolyai–Lobacsevszkij-geometria, sem pedig a Riemann-geometria mellett. Eltűnődhetünk azon, hogy vajon ő mennyire látta ezeknek jövőt formáló hatalmas lehetőségét.

Összegzés

Összegzésképpen valamilyen megnyugtató dolgot szeretnénk mondani. Láttuk, hogy milyen forradalmi jellegű volt a Bolyai és Lobacsevszkij geometriája,[19] és hogy ezen a forradalmi úton haladva jelent meg Bernhard Riemann még álta-

---

[16] Ez is rendkívül érdekes történet. Riemann levelet írt egyik testvérének, és leírta, hogy sorrend szerint a habilitációs előadásra javasolt első két tételét már kidolgozta, mert általában mindig az első tételt szokták kérni a vizsgán. Most Gauss éppen arra a harmadikra mutatott rá, amelyet Riemann még nem dolgozott ki, csak megsejtett benne valami jelentős eredményt. Riemann azt írta a testvérének, hogy „most vagyok aztán bajban, mert még ezt nem dolgoztam ki", de az idő sürget. Összeszedte minden szellemi erejét, kidolgozta a harmadik javasolt előadását, s lám, kiderült, hogy az nem volt más, mint egy újabb geometriai terület megalapozása, amely nélkül Einstein nem tudta volna kidolgozni a relativitáselméletét.

[17] Vö. Szente János: A hiperbolikus geometria és a Riemann-geometria kapcsolata. In: Kapitány Katalin – Németh Géza – Silberer Vera (szerk.): *i. m.* 308–309. Riemann habilitációs művének címe: *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen.* [Riemann, Bernhard: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen. In: *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 13. (1868), 133–150.]

[18] Uo. 308.

[19] Párizsban, 1894-ben a Matematikai Tudományok Nemzetközi Bibliográfiai Kongresszusa az új geometriát, amelyet mi is gyakran hiperbolikus geometriának hívtunk, „Bolyai–Lobacsevszkij-geometriá"-nak nevezte el. Korábban még Gauss neve is szerepelt a hiperbolikus geometria felfedezői között, de ettől kezdve helyesen iktatták ki az ő nevét. Vö. Kálmán Attila: Bevezető Bolyai János új, más világába. In: *Természet Világa* 133. (2003), I. különszám, Bolyai-emlékszám, (38–43) 43.

lánosabb szemléletű geometriája. Egyiknek sem volt döntő sikere, mert még nem ismerték föl a jelentőségüket. Prékopa András matematikus megállapítása szerint akkor még senki nem gondolta, hogy

> „[...] a geometria és a valóság lehet különböző, hogy a geometria felfogható az absztrakt elméletek egy osztályának, nem mondva le az alkalmazás igényéről, mert önkényesen is értelmezhető struktúrái ugyanolyan módon vizsgálhatók, mint pl. a függvények, vagy más matematikai objektumok.”[20]

A mindennapi szemlélet ugyanis azt sugallja, hogy a körülöttünk lévő világ euklideszi, azaz pontok, egyenesek és síkok segítségével írható le. Kant is ezt tanította, és tekintélyével erre terelte még a tudósok figyelmét is.[21] Bolyai viszont élesen bírálta Kant térrel kapcsolatos gondolatait:

> „A különben sok érdemű, és szépelméjű Kant alaptalan, s helytelenül elficamodva azt az értelmetlen tant tanálta is állítani: hogy az űr [...] nem önálló-mi, hanem csak nézlet vagy látványaink idomja.”[22]

Nem sokkal ez után történt egy újabb korszakos lépés a fizikában, amikor is Maxwell megmagyarázta az elektromágneses erőtér létezését, sőt ennek a törvényét is felírta a híres parciális differenciálegyenletek segítségével. Einstein ezt úgy jellemezte, hogy Maxwell egy új valóságot tárt föl az elektromágneses erőtér bevezetésével, magyarázatával. Ekkor kezdődött a gravitáció erőtérként való felfogása is, ugyanis előtte csak annyit tudtak, hogy „távolbahatásról” van szó. Még Newton is csak annyit gondolt a gravitációról, hogy az nem más, mint “action at a distance”.

Ma már valóban másként látjuk a tér valóságát, hiszen az általános relativitáselmélet kapcsán állíthatjuk, hogy éppen a tér az a valóság, amely ilyen vagy olyan tulajdonságokat mutat. Tehát nem csupán a képzeletünkben van meg, miként azt Immanuel Kant gondolta, hanem valóságos természetelemként mutatkozik. Bolyai János valójában arra mutatott rá a maga bátor lépésével, hogy logikailag lehetséges a nem euklideszi geometria is, méghozzá több fajta, és ezek bármenynyire is absztrakt geometriák, mégis kapcsolatba hozhatók a valóságos fizikai világgal. Ezért helyénvaló a Bolyai–Lobacsevszkij-szemléletet a geometria kopernikuszi fordulatának nevezni, ugyanis magában hordozza azt a lehetőséget, amely szerint mögötte egy addig nem ismert, új valóság létezik. Amikor George Bruce

[20] Prékopa András: *Bolyai János forradalma,* 12–13.

[21] Többen megjegyzik, hogy valószínűleg Gauss sem akart a kantiánus világ ellen állást foglalni.

[22] Idézi Gábos Zoltán: *Mit adott a fizikának Bolyai János?* 274.

Halsted professzor 1891-ben angolra fordította Bolyai új térelméletét, az előszóban ezt írta: „Ez a huszonnégy oldal a legrendkívülibb két tucat oldal a gondolkodás történetében."[23]

Zárógondolatok

Azzal, hogy Bolyai János és Nyikolaj Lobacsevszkij fölnyitották Euklidész zárt világát, az egzakt tudományok körében egy olyan folyamatot indítottak el, amely programot adott a 20. századnak. E program megvalósítása kapcsán mondta Einstein:

> „Fizikai okokból bizonyosnak tűnt, hogy a metrikus tér egyúttal a gravitációs tér is. Minthogy a gravitációs teret a tömegek konfigurációja határozza meg, ezért a tér geometriai szerkezete fizikai tényezőktől függ. A tér tehát ezen elmélet szerint [...] nem abszolút többé, hanem szerkezete fizikai hatásoktól függ."[24]

Ez egy olyan üzenet, amelynek Bolyai nagyon örült volna, de voltaképpen ő indította el útjára ezt a folyamatot a zárt axiomatikus világ felnyitásával. Ő volt az első a tudománytörténet során, aki egy olyan állítást fogalmazott meg, amely teljesen ellentétes volt a rációval, azaz hogy az egyenesen kívül lévő ponton keresztül nemcsak egy párhuzamos egyenes húzható. Ezt a képtelenséget követte később Einstein bátorsága is a fény állandó sebességének feltételezésével, és mindkettőből hatalmas eredmény származott az utókorra. Ilyen értelemben a kálvinista székely Bolyainak tényleg igaza volt, amikor azt írta édesapjának: „a semmiből egy új, más világot teremtettem".

Felhasznált irodalom

Albert Einstein: *Válogatott tanulmányok*. Ford. Nagy Imre. Gondolat Könyvkiadó, Budapest 1971.

Kálmán Attila: Bevezető Bolyai János új, más világába. In: *Természet Világa* 133. (2003), I. különszám, Bolyai-emlékszám, 38–43.

Kiss Elemér: *Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából*. Akadémiai Kiadó – Typotex Kiadó, Budapest 2005.

Prékopa András: Bolyai János forradalma. In: *Természet Világa* 133. (2003), I. különszám, Bolyai-emlékszám, 3–21.

---

[23] Prékopa András: *Bolyai János forradalma,* 13.

[24] Albert Einstein: *Válogatott tanulmányok*. Ford. Nagy Imre. Gondolat Könyvkiadó, Budapest 1971, 257.

Prékopa András: Bolyai János felfedezésének előzményei és utóhatása. In: Kapitány Katalin – Németh Géza – Silberer Vera (szerk): *Bolyai emlékkönyv Bolyai János 200. születésnapjára*. Vincze Kiadó, Budapest 2004, 93–110.

Puskás Ferenc: Előhang a Bolyai-emlékkönyvhöz. In: Puskás Ferenc – Tibád Zoltán (szerk.): *Bolyai emlékkönyv. Bolyai János születésének 200 éves évfordulójára.* Erdélyi Magyar Műszaki Tudományos Társaság, Kolozsvár 2003, 7–13.

Szénássy Barna: Megjegyzések Gauss nem euklideszi geometriai eredményeihez. In: Kapitány Katalin – Németh Géza – Silberer Vera (szerk): *Bolyai emlékkönyv Bolyai János 200. születésnapjára*. Vincze Kiadó, Budapest 2004, 111–120.

* * *

Most of the things we learned about geometry in school were part of a world of knowledge based on the Euclidean axioms. That kind of knowledge, however, is not sufficient to understand all the laws and structures of nature. There are unique curved surfaces that can only be described using non-Euclidean geometry. This new form of geometry was discovered by János Bolyai in 1823, an excellent student of the Reformed College of Marosvásárhely in Transylvania. Through his achievement, he opened the former axiomatic Euclidean world to new possibilities, and at the same time, raised universal scientific thinking to a new level.

Keywords: Euclidean geometry, axioms, postulates, hyperbolic geometry, opening of closed systems.